Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

# Analisi Matematica

Pisa, 12 dicembre 2024

**Esercizio 1** Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1 + \log x}{x}$$

determinandone insiemi di continuità e di derivabilità, limiti, asintoti, punti di massimo o di minimo locale, massimo e minimo (o estremi superiore e inferiore), intervalli di monotonia e di convessità ed eventuali punti di flesso. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

**Soluzione**

L'insieme di definizione di $\log x$ è $(0, +\infty)$ e il denominatore di $f$ è diverso da zero in questo intervallo. Quindi, il dominio di $f$ è $(0, +\infty)$. La funzione è continua nel suo dominio, in quanto il numeratore è somma di funzioni continue e il denominatore è una funzione continua non nulla. Per lo stesso motivo, la funzione è derivabile, in quanto rapporto di funzioni derivabili, con denominatore non nullo.

Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio. Abbiamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + \log x}{x} = -\infty$$

in quanto il numeratore tende a $-\infty$ e il denominatore tende a 0 ed è sempre positivo sul dominio. In particolare, la funzione ha un asintoto verticale di equazione $x = 0$. Abbiamo poi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \log x}{x} = 0$$

per il confronto tra infiniti, in quanto $x$ tende a infinito più velocemente di $\log x$ per $x \to \infty$. Possiamo anche applicare il criterio di de l'Hôpital, che ci dice che il limite cercato è uguale al limite di $1/x$, e quindi 0. In particolare, la funzione ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ per $x \to +\infty$. Essendoci questo asintoto, la funzione non può avere asintoti obliqui.

Studiamo la derivata della funzione $f$. Abbiamo

$$f'(x) = \frac{-(1 + \log x) + (1/x)x}{x^2} = \frac{-\log x}{x^2}.$$

Visto che la funzione $x^2$ è sempre strettamente positiva nel dominio di $f$, il segno di $f'(x)$ è dato dal segno di $-\log x$. Abbiamo quindi

$$f'(x) > 0 \text{ per } 0 < x < 1, \qquad f'(x) = 0 \text{ per } x = 1 \qquad \text{e} \qquad f'(x) < 0 \text{ per } x > 1.$$

La funzione è quindi monotona crescente in $(0, 1)$, ha un massimo (a priori locale) in $x = 1$ ed è monotona decrescente su $(1, +\infty)$. Il punto $x = 1$ è quindi anche di massimo globale per $f$, e la funzione è limitata superiormente, con $f(1) = 1$ come estremo superiore. La funzione non ha minimi locali e non è limitata inferiormente.

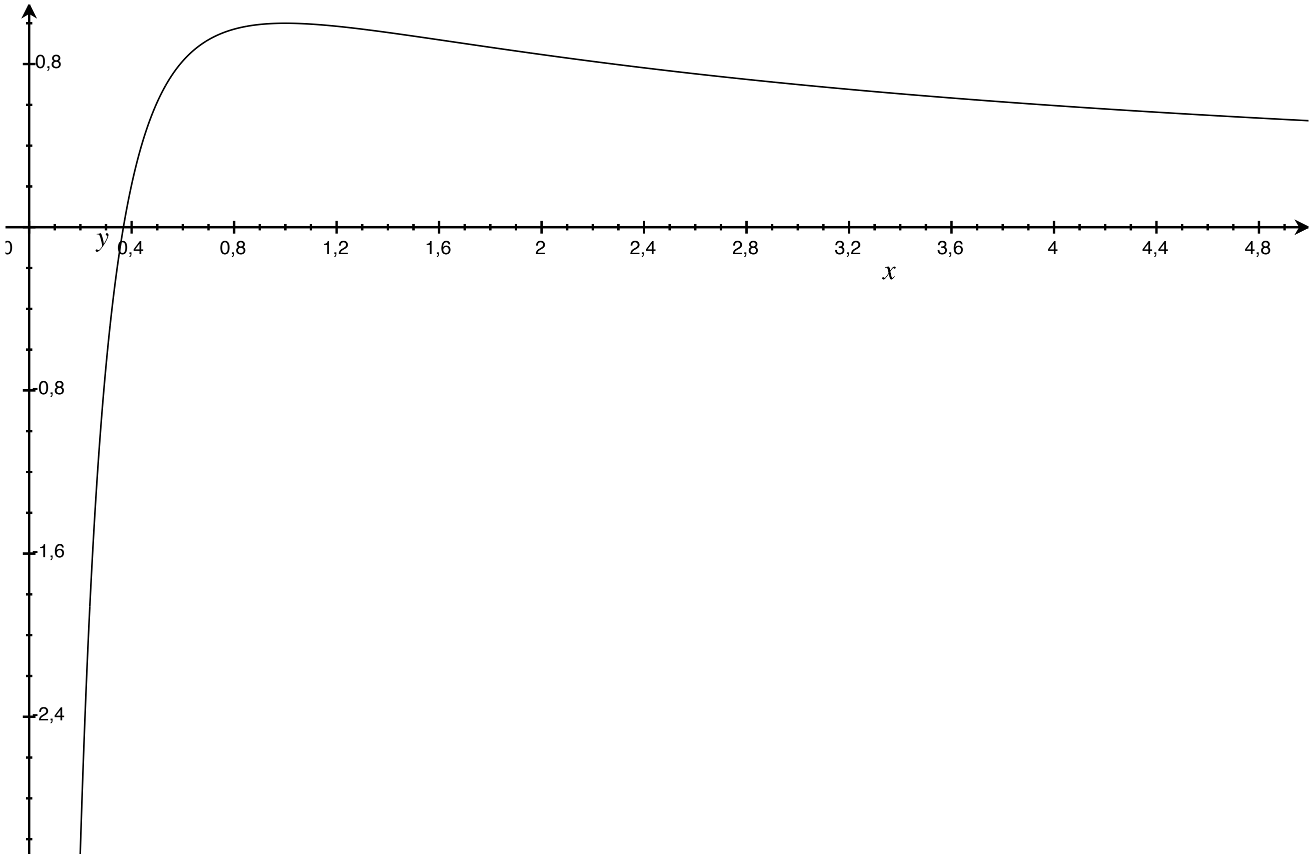
Studiamo la derivata seconda. Abbiamo

$$f''(x) = \frac{-(1/x)x^2 + 2x(\log x)}{x^4} = \frac{2x \log x - x}{x^4} = \frac{2 \log x - 1}{x^3}.$$

Visto che la funzione $x^3$ è sempre strettamente positiva nel dominio di $f$, il segno di $f''(x)$ è dato dal segno di $2 \log x - 1$. Abbiamo quindi

$$f''(x) < 0 \text{ per } 0 < x < \sqrt{e}, \qquad f''(x) = 0 \text{ per } x = \sqrt{e} \qquad \text{e} \qquad f''(x) > 0 \text{ per } x > \sqrt{e}.$$

La funzione è quindi concava in $(0, \sqrt{e})$, ha un flesso in $x = \sqrt{e}$ ed è convessa su $(\sqrt{e}, +\infty)$.




**Esercizio 2** Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge il seguente integrale improprio

$$\int_2^3 \frac{x\,(\sin(x-2))^\alpha}{\sqrt{x^2-4}}\,dx.$$

**Soluzione**

Con il cambio di variabile $t = x-2$, visto che $x^2-4 = (x-2)(x+2)$, l'integrale diventa

$$\int_0^1 \frac{(t+2)\,(\sin(t))^\alpha}{\sqrt{t(t+4)}}\,dt$$

con un unico punto problematico in $t = 0$.

Usando $\sin(t) = t + o(t)$ si ottiene $(\sin(t))^\alpha = (t+o(t))^\alpha = t^\alpha(1+o(1))^\alpha$, e si può usare confronto asintotico con $g(t) = \frac{t^\alpha}{t^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}-\alpha}}$ (le due funzioni sono entrame positive nell'intervallo di interesse).

Si ha

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{(t+2)(\sin(t))^\alpha}{\sqrt{t(t+4)}}}{\frac{1}{t^{\frac{1}{2}-\alpha}}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{(t+2)(1+o(1))^\alpha}{\sqrt{t+4}} = 1.$$

Dunque l'integrale improprio del testo si comporta come

$$\int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{1}{2}-\alpha}}\,dt$$

che converge se $\frac{1}{2}-\alpha < 1$, cioè $\alpha > -\frac{1}{2}$, e diverge positivamente se $\frac{1}{2}-\alpha \geq 1$, cioè $\alpha \leq -\frac{1}{2}$.

**Esercizio 3** Discutere la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \arctan \frac{1}{\sqrt[5]{n}}.$$

**Soluzione**

La serie converge semplicemente per il criterio di Leibnitz: la successione $a_n = \arctan \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$ è positiva, infinitesima, visto che $\frac{1}{\sqrt[5]{n}} \to 0$ se $n \to +\infty$ e arctan è continua, e decrescente, grazie al fatto che $\frac{1}{\sqrt[5]{n}}$ è strettamente decrescente e arctan è strettamente crescente.

La serie non converge assolutamente: usando confronto asintotico tra $\arctan \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$ e $b_n = \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$ (che sono entrambe successioni positive), tenendo conto dello sviluppo di Taylor $\arctan(x) = x + o(x)$ con $x = \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$, si trova

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan \frac{1}{\sqrt[5]{n}}}{\frac{1}{\sqrt[5]{n}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt[5]{n}} + o(\frac{1}{\sqrt[5]{n}})}{\frac{1}{\sqrt[5]{n}}} = 1.$$

Si conclude usando il fatto che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$ diverge positivamente.